HAMBURGER
MATHEMATISCHE EINZELSCHRIFTEN
5. HEFT/1928

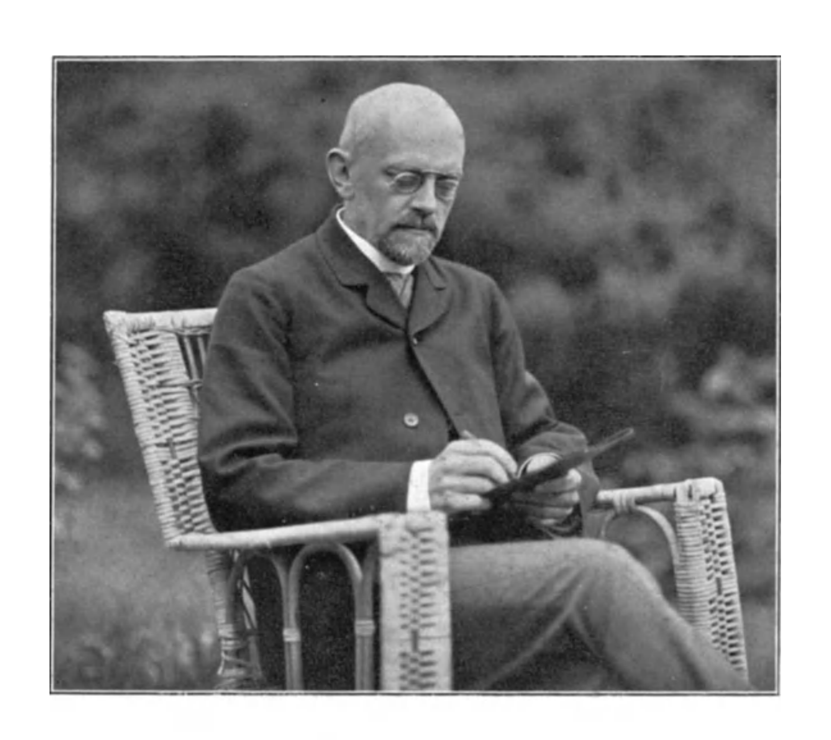
DAVID HILBERT

DIE GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

MIT ZUSÄTZEN VON *H. WEYL*
UND *P. BERNAYS*

PREIS *RM* 1.–

SPRINGER FACHMEDIEN
WIESBADEN GMBH
1928



D. Hilbert.

Die Grundlagen der Mathematik[1]).

Vortrag, gehalten auf Einladung des Mathematischen Seminars im Juli 1927 in Hamburg.

Von DAVID HILBERT aus Göttingen.

Es ist für mich eine hohe Ehre und zugleich ein Bedürfnis, meine Gedanken über die Grundlagen der Mathematik, die ich seinerzeit vor fünf Jahren hier entwickelt habe, und die mich seitdem dauernd aufs lebhafteste beschäftigt haben, zu ergänzen und weiterzuführen. Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, verfolge ich ein bedeutsames Ziel: ich möchte nämlich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch die mathematischen Begriffsbildungen und Schlüsse in eine solche Fassung bringe, daß sie unwiderleglich sind und doch ein Bild der gesamten Wissenschaft liefern. Ich glaube dieses Ziel mit meiner Beweistheorie völlig erreichen zu können, wenn auch bis zu ihrer völligen Fertigstellung noch sehr viele Arbeit nötig sein wird.

Die Mathematik wie jede andere Wissenschaft kann nie durch Logik allein begründet werden; vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen uns schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse außerlogische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen als erforderlich

---

[1]) Vgl. meine bisherigen Veröffentlichungen über diesen Gegenstand: Neubegründung der Mathematik, Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ., Bd. I, S. 157 (1922); die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Ann., Bd. 88, S. 151 (1922); Über das Unendliche, Math. Ann. Bd. 95, S. 161 (1925).

erachte. Und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist. Dies ist das geringste Maß von Voraussetzung, das kein wissenschaftlicher Denker entbehren kann und daher jedermann, sei es bewußt oder unbewußt, innehalten muß.

Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:

Alle Aussagen, die die Mathematik ausmachen, werden in Formeln umgesetzt, sodaß die eigentliche Mathematik zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß in ihnen außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen

$$\underset{\text{(folgt)}}{\rightarrow}, \quad \underset{\text{(und)}}{\&}, \quad \underset{\text{(oder)}}{\vee}, \quad \underset{\text{(nicht)}}{\overline{}}, \quad \underset{\text{(alle)}}{(x)}, \quad \underset{\text{(es gibt)}}{(Ex)}$$

vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{matrix}}{\mathfrak{T}}$$

wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. aus ihr durch Einsetzung entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom oder die Endformel eines Beweises ist.

Die Axiome und beweisbaren Sätze, d. h. die Formeln, die durch dieses Verfahren entstehen, sind die Abbilder der Gedanken, die die übliche bisherige Mathematik ausmachen.

Durch das bezeichnete Programm ist die Wahl der Axiome für unsere Beweistheorie schon vorgezeichnet; wir ordnen sie folgendermaßen an:

I. 1.—4. *Axiome der Folge.*

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Zufügen einer Voraussetzung).
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Weglassen einer Voraussetzung).
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (Vertauschen der Voraussetzungen).
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (Elimination einer Aussage).

II. 5.—10. *Axiome über & und* $\vee$.

5. $A \mathbin{\&} B \rightarrow A$.
6. $A \mathbin{\&} B \rightarrow B$.
7. $A \rightarrow (B \rightarrow A \mathbin{\&} B)$.
8. $A \rightarrow A \vee B$.
9. $B \rightarrow A \vee B$.
10. $((A \rightarrow C) \mathbin{\&} (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$.

III. 11.—12. *Axiome der Negation.*

11. $(A \rightarrow B \mathbin{\&} \overline{B}) \rightarrow \overline{A}$ (Satz vom Widerspruch).
12. $\overline{\overline{A}} \rightarrow A$ (Satz von der doppelten Verneinung).

Diese Axiome der Gruppen I, II, III sind keine anderen als die Axiome des Aussagenkalküls. Aus 11 und 12 folgt insbesondere die Formel

$$(A \mathbin{\&} \overline{A}) \rightarrow B$$

und ferner das logische Prinzip des Tertium non datur

$$((A \rightarrow B) \mathbin{\&} (\overline{A} \rightarrow B)) \rightarrow B.$$

IV. 13. *Das logische ε-Axiom.*

13. $A(a) \rightarrow A(\varepsilon A)$.

Hierin bezeichnet $\varepsilon(A)$ ein Ding, für das die Aussage $A(a)$ sicher zutrifft, wenn sie überhaupt für ein Ding zutrifft; ε heiße die logische ε-Funktion. Zur Erläuterung der Rolle der logischen ε-Funktion sei folgendes bemerkt.

Die ε-Funktion kommt im Formalismus in dreifacher Weise zur Anwendung.

1. Es läßt sich mit Hilfe des ε das „alle" und „es gibt" definieren, nämlich folgendermaßen:

$$(a)\, A(a) \rightleftarrows A(\varepsilon(\overline{A})),$$
$$(Ea)\, A(a) \rightleftarrows A(\varepsilon(A)).$$

Der Doppelpfeil steht hier zur Zusammenfassung zweier Folgtformeln; statt desselben wollen wir späterhin auch das Zeichen der „Äquivalenz" $\sim$ anwenden.

Auf Grund dieser Definition liefert das ε-Axiom IV 13 die für das All- und das Seinszeichen gültigen logischen Beziehungen, wie

$$(a)\, A(a) \rightarrow A\,b \text{ (Aristotelisches Axiom)},$$
$$\overline{(a)\, A(a)} \rightarrow (Ea)\, \overline{A(a)} \text{ (Tertium non datur)}.$$

2. Trifft eine Aussage $\mathfrak{A}$ auf ein und nur ein Ding zu, so ist

$\varepsilon(\mathfrak{A})$ *dasjenige Ding,* für welches $\mathfrak{A}a$ gilt.

Die ε-Funktion ermöglicht es also, eine solche Aussage $\mathfrak{A}a$, die nur auf ein Ding zutrifft, in der Form

$$a = \varepsilon(\mathfrak{A})$$

aufzulösen.

3. Darüber hinaus hat das ε die Rolle der Auswahlfunktion, d. h. im Falle, wo $\mathfrak{A}a$ auf mehrere Dinge zutreffen kann, ist $\varepsilon\mathfrak{A}$ *irgendeines* von den Dingen a, auf welche $\mathfrak{A}a$ zutrifft.

Zu diesen rein logischen Axiomen kommen die folgenden speziell mathematischen Axiome:

V. 14.—15. *Axiome der Gleichheit.*

14. $$a = a$$

15. $$(a = b) \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)).$$

VI. 16.—17. *Axiome der Zahl.*

16. $$a' \neq 0$$

17. $\big(A(0) \mathbin{\&} (a)\,(A(a) \rightarrow A(a'))\big) \rightarrow A(b)$. (Prinzip der vollständigen Induktion.)

Hiernach bedeutet also a' die auf a folgende Zahl und die ganzen Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ schreiben sich in der Gestalt $0', 0'', 0''', \cdots$.

Für die Zahlen der 2ten Zahlklasse und der höheren Cantorschen Zahlklassen müssen die entsprechenden Induktionsaxiome hinzugefügt werden, die aber gemäß Cantors Theorie zu einem Schema zu vereinigen wären.

Endlich bedürfen wir noch der *expliziten Definitionen,* die den Begriffsbildungen der Mathematik entsprechen und den Charakter von Axiomen haben, sowie gewisser *Rekursionsaxiome,* die aus einem allgemeinen Rekursionsschema hervorgehen. Bevor wir die Formulierung dieser Axiome erörtern, müssen wir erst die Regeln aufstellen, nach denen überhaupt die Axiome verwendet werden sollen. Denn in meiner Theorie wird das inhaltliche Schließen durch ein äußeres Handeln nach Regeln ersetzt; damit erreicht die axiomatische Methode diejenige Sicherheit und Vollendung, deren sie fähig ist und deren sie auch bedarf, wenn sie zum Grundmittel aller theoretischen Forschung werden soll. Zunächst gelten folgende Festsetzungen.

Für mathematische Variable werden stets kleine lateinische Buchstaben, für individuelle mathematische Gebilde (spezielle Funktionen) dagegen kleine griechische Buchstaben benutzt.

Für variable Aussagen (allgemeine Formeln) werden stets große lateinische Buchstaben, für individuelle Aussagen dagegen große griechische Buchstaben benutzt, z. B.

$$Z(a),\quad N(a).$$

Was das Verfahren der Einsetzung betrifft, so gelten dabei folgende allgemeinen Verabredungen.

Für Aussagenvariable dürfen nur Formeln eingesetzt werden, d. h. solche Figuren, die mit Hilfe der logischen Zeichen

$$\rightarrow,\quad \&,\quad \vee,\quad \overline{},\quad (x),\quad (Ex),$$

aus Elementarformeln zusammengesetzt sind.

Die Elementarformeln werden gebildet durch Formelvariable, eventuell mit angefügten Argumenten, oder durch Zeichen für individuelle Aussagen, wie

$$Z,\quad N,\quad =,\quad <,$$

mit Ausfüllung der zugehörigen Argumentstellen.

Für eine mathematische Variable darf eine jede Figur eingesetzt werden; jedoch muß, wenn eine mathematische Variable in einer Formel auftritt, stets die ihre Art charakterisierende Individualaussage nebst dem Folgtzeichen voranstehen, z. B.

$$Z(a) \rightarrow a+1 = 1+a,$$
$$N(a) \rightarrow N(a').$$

Diese Verabredung bewirkt, daß doch nur solche Einsetzungen in Betracht kommen, die gewöhnliche Zahlen bzw. Zahlen der zweiten Zahlklasse sind. In den Axiomen V, VI sind der Kürze halber die voranzustellenden Aussagen Za, Zb weggelassen worden.

Deutsche große wie kleine Buchstaben bedeuten Hinweise und werden nur zu Mitteilungen verwandt.

Die *mathematischen Variablen* sind von zweierlei Art

1. die *Grundvariablen,*
2. die *Variablengattungen.*

1. Während man in der gesamten Arithmetik und Analysis mit der gewöhnlichen ganzen Zahl als einziger Grundvariablen auskommt, gehört jetzt einer jeden Cantorschen transfiniten Zahlklasse eine Grundvariable zu, die eben die Ordinalzahlen dieser Klasse anzunehmen fähig ist. Einer jeden Grundvariablen entspricht demgemäß eine Aussage,

die sie als solche charakterisiert; diese ist implizite durch Axiome charakterisiert.

Zu jeder Grundvariablen gehört eine Art von Rekursion, mit deren Hilfe man Funktionen definiert, deren Argument eine solche Grundvariable ist. Die zu der Zahlenvariablen gehörige Rekursion ist die „gewöhnliche Rekursion“, gemäß welcher eine Funktion einer Zahlenvariablen n definiert wird, indem man angibt, welchen Wert sie für $n = 0$ hat und wie man den Wert für n' aus dem für n erhält. Die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rekursion ist die transfinite Rekursion, deren allgemeines Prinzip darin besteht, den Wert der Funktion für einen Wert der Variablen durch die vorhergehenden Funktionswerte zu bestimmen.

2. Aus den Grundvariablen leiten wir noch weitere Arten von Variablen ab, indem wir auf die Aussagen für die Grundvariablen z. B. auf Z logische Verknüpfungen anwenden. Die so definierten Variablen heißen Variablengattungen, die sie definierenden Aussagen heißen Gattungsaussagen; für diese werden wieder jedesmal neue Individualzeichen eingeführt. So liefert die Formel

$$\Phi(f) \sim (a)\Big(Z(a) \rightarrow Z\big(f(a)\big)\Big)$$

das einfachste Beispiel für eine Variablengattung; diese Formel definiert die Gattung der Funktionsvariablen (Funktion-sein). Ein weiteres Beispiel ist die Formel

$$\Psi(g) \sim (f)\ (\Phi(f) \rightarrow Zg(f));$$

sie definiert das „Funktionenfunktion-sein“; das Argument g ist die neue Funktionenfunktionsvariable.

Für die Herstellung der höheren Variablengattungen muß man die Gattungsaussagen selbst mit Indizes versehen, wodurch ein Rekursionsverfahren ermöglicht wird.

Nunmehr können wir kennzeichnen, was unter expliziten Definitionen und unter Rekursions-Axiomen zu verstehen ist: eine explizite Definition ist eine Äquivalenz oder Gleichheit, auf deren linker Seite das zu definierende Zeichen (großer oder kleiner griechischer Buchstabe) mit gewissen Variablen als Argumenten steht und rechts eine Figur, in der als freie Variable nur jene Argumente auftreten, und als Individualzeichen nur solche, die bereits eingeführt sind.

Die Rekursions-Axiome sind Formelsysteme, die in entsprechender Weise dem Rekursionsverfahren nachgebildet sind.

Dies sind die allgemeinen Grundlagen meiner Theorie. Um Ihnen die Anwendungsweise näherzubringen, möchte ich einige Beispiele

von speziellen Funktionen anführen, wie sie durch Rekursion definiert werden.

Wenn wir die Funktion $\iota(a)$, die 0 ist, für das Argument 0 sonst stets den Wert 1 hat, definieren wollen, so sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \iota(0) &= 0 \\ \iota(a') &= 1, \end{aligned}$$

wie wir sehen, schon selbst eine Rekursion. Wie sich Summe, Produkt und die Funktion $a!$ durch Rekursion definieren lassen, ist ja bekannt.

Auch die Funktion $\mu(a, b)$, die den Wert der kleineren von den beiden Zahlen a, b hat, ist durch Rekursion leicht definierbar.

Ferner erwähne ich noch zwei kompliziertere Beispiele, nämlich die Funktion

$$\begin{aligned} \tau(a) &= 1, \text{ wenn } a \text{ eine Primzahl ist} \\ \tau(a) &= 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

und die Funktion $\pi(a)$, welche die Anzahl der Primzahlen $\leqq a$ angibt.

In der Tat können auch diese durch Rekursion definiert werden; man hat dazu zunächst folgende zwei Funktionen von je drei Argumenten einzuführen:

$\varphi(a, b, c) = 0$, wenn b gleich einer der Zahlen $1 . a$, $2 . a$, $\ldots$, $c \cdot a$ ist ($b > 0$),
$= 1$ sonst

$\psi(a, b, c)$ gleich der kleinsten von denjenigen unter den Zahlen $1, 2, \ldots, a$, welche Teiler von b und $> c$ sind, bzw., falls keine jener Zahlen diese Eigenschaft hat, gleich b.

Wenn wir nun daran gehen, die Mathematik aufzubauen, so werden wir zunächst die elementare Zahlentheorie ins Auge fassen; wir erkennen, daß wir deren Wahrheiten durch inhaltlich-anschauliche Überlegungen gewinnen und beweisen können. Dabei werden die vorkommenden Formeln nur zur Mitteilung angewandt. Die Buchstaben bedeuten Zahlzeichen, und durch eine Gleichung wird die Übereinstimmung zweier Zeichen mitgeteilt.

Anders ist die Sachlage in der Algebra; in der Algebra betrachten wir die Buchstabenausdrücke an sich als selbständige Gebilde, und die Sätze der Zahlentheorie, die in der Algebra inbegriffen sind, werden durch sie formalisiert. Anstelle der übrigen Zahlzeichen treten Formeln, die ihrerseits nun konkrete Objekte einer anschaulichen Betrachtung sind, und an die Stelle des inhaltlichen zahlentheoretischen Beweises tritt die Ableitung einer Formel aus einer anderen Formel nach gewissen Regeln.

Die Algebra geht also schon wesentlich über die inhaltliche Zahlentheorie hinaus. Hier ist z. B. bereits die Formel

$$1+a=a+1,$$

in der a eine eigentliche Zahlenvariable ist, nicht mehr bloß die Mitteilung von etwas Inhaltlichem, sondern ein gewisses formales Gebilde, eine beweisbare Formel, die an sich nichts bedeutet und deren Beweis nicht inhaltlich geführt werden kann, sondern der Heranziehung des Induktionsaxioms bedarf.

Die auch durch inhaltliche Überlegung zu bestätigenden Formeln

$$1+3=3+1, \qquad 1+7=7+1$$

können erst durch ein Beweisverfahren aus jener algebraischen Formel erhalten werden, indem wir formal für a die Zahlzeichen 3 und 7 einsetzen, also eine Einsetzungsregel anwenden.

So enthält schon die elementare Mathematik erstens Formeln, denen inhaltliche Mitteilungen finiter Aussagen, also im wesentlichen numerische Gleichungen oder Ungleichungen oder daraus zusammengesetzte kompliziertere Mitteilungen entsprechen und die wir auch die *realen Aussagen* der Theorie nennen können, und zweitens Formeln, die an sich nichts bedeuten, ebenso wie die Zahlzeichen der inhaltlichen Zahlentheorie, sondern nur Objekte für die Anwendung unserer Regeln sind und als die *idealen Gebilde* der Theorie angesehen werden müssen.

Diese Erwägungen zeigen, daß wir nur nötig haben, die Entwicklung, die das bisher übliche mathematische Verfahren bereits genommen hat, in naturgemäßer und konsequenter Weise fortzuführen, um zu der Auffassung der *Formeln als idealer Aussagen* zu gelangen. Und naturgemäß und konsequent ist es dann, wenn wir ebenso wie die mathematischen Variablen nunmehr auch die logischen Zeichen

$$\rightarrow, \quad \&, \quad \vee, \quad \overline{}, \quad (x), \quad (Ex)$$

und die logischen Variablen, nämlich die Aussagenvariablen

$$A, \; B, \; C, \; \cdots$$

den Zahlzeichen und den Buchstaben in der Algebra gleichstellen und ebenfalls als Zeichen auffassen, die an sich nichts bedeuten, sondern nur Bausteine für die idealen Aussagen sind.

Zu dieser Ausdehnung des formalen Standpunktes der Algebra auf die gesamte Mathematik haben wir auch einen dringenden Anlaß. Sie ist nämlich das Mittel, um uns einer grundsätzlichen Schwierigkeit zu

entheben, die sich bereits in der elementaren Zahlentheorie geltend macht. Ich nehme als Beispiel wieder die Gleichung

$$a+1 = 1+a;$$

wenn wir diese als Ausdruck einer Mitteilung

$$\mathfrak{a}+1 = 1+\mathfrak{a}$$

gelten lassen wollten, wobei $\mathfrak{a}$ irgendeine vorgelegte Zahl bedeutet, so wäre diese Mitteilung nicht negationsfähig, weil ja die Aussage, daß es eine Zahl $\mathfrak{a}$ gibt, für welche

$$\mathfrak{a}+1 \neq 1+\mathfrak{a}$$

ausfällt, keinen finiten Sinn gibt; man kann ja nicht alle Zahlen durchprobieren. Wir würden also im Sinne der finiten Einstellung nicht die Alternative anwenden können, wonach eine Gleichung wie die obige, in der ein unbestimmtes Zahlzeichen vorkommt, entweder für jedes Zahlzeichen erfüllt ist oder durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden kann. Denn diese Alternative beruht ja als Anwendung des „Tertium non datur" wesentlich auf der Voraussetzung, daß die Behauptung der allgemeinen Gültigkeit jener Gleichung einer Negation fähig ist.

Aber auf die Anwendung des Tertium non datur sowie aller übrigen in unseren Axiomen ausgedrückten Gesetze der Aristotelischen Logik können wir nicht verzichten, da ohne sie der Aufbau der Analysis unmöglich ist.

Die hierin liegende wesentliche Schwierigkeit wird nun durch die idealen Aussagen vermieden. Adjungieren wir nämlich zu den realen Aussagen die idealen Aussagen, so erhalten wir damit ein System von Aussagen, in dem die einfachen Regeln der Aristotelischen Logik sämtlich gelten und die üblichen Methoden des mathematischen Schließens alle zu Recht bestehen. Wie beispielsweise in der elementaren Zahlentheorie die negativen Zahlen unentbehrlich sind, wie durch die Kummer-Dedekindschen Ideale erst die moderne Zahlentheorie und Algebra möglich wird, so ist durch Einführung der idealen Aussagen erst wissenschaftliche Mathematik möglich.

Freilich eine Bedingung, eine einzige, aber auch unerläßliche, ist stets an die Anwendung der Methode der idealen Elemente geknüpft; diese ist der Nachweis der Widerspruchsfreiheit: die Erweiterung durch Hinzufügen von idealen Elementen ist nämlich nur dann statthaft, wenn dadurch im alten engeren Bereiche keine Widersprüche entstehen, wenn also die Beziehungen, die sich bei der Elimination der idealen Gebilde für die alten Gebilde herausstellen, stets im alten Bereiche gültig sind.

Dieses Problem der Widerspruchsfreiheit ist aber bei der gegenwärtigen Sachlage durchaus der Behandlung zugänglich. Es handelt sich ja darum zu zeigen, daß bei der Einführung der idealen Gebilde nicht zwei einander logisch entgegengesetzte Aussagen

$$\mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{A}}$$

herauskommen können. Nun folgt, wie ich oben bemerkte, aus den Axiomen der Negation die logische Formel

$$(A \mathbin{\&} \overline{A}) \rightarrow B.$$

Setzen wir hierin für A die betreffende Aussage $\mathfrak{A}$ und für B die Ungleichung

$$0 \neq 0,$$

so bekommen wir $(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \overline{\mathfrak{A}}) \rightarrow (0 \neq 0)$.

Und mit dieser Formel können wir aus $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ die Formel $0 \neq 0$ ableiten. Wir haben daher zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit nur zu zeigen nötig, daß in einem Beweise aus unseren Axiomen nach den aufgestellten Regeln

$$0 \neq 0$$

sich nicht als Endformel herausstellen kann, daß also $0 \neq 0$ nicht eine beweisbare Formel ist. Und dies ist eine Aufgabe, die grundsätzlich ebenso im Bereich der anschaulichen Betrachtung liegt, wie in der inhaltlich aufgebauten Zahlentheorie etwa die Aufgabe des Beweises der Irrationalität von $\sqrt{2}$, d. h. des Beweises, daß es unmöglich ist, zwei Zahlzeichen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zu finden, welche in der Beziehung $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{b}^2$ stehen, wo also gezeigt werden soll, daß sich nicht zwei Zahlzeichen von einer gewissen Beschaffenheit angeben lassen. Entsprechend kommt es für uns darauf an, zu zeigen, daß sich nicht ein Beweis von einer gewissen Beschaffenheit angeben läßt. Ein formalisierter Beweis ist aber, ebenso wie ein Zahlzeichen, ein konkreter und überblickbarer Gegenstand. Er ist von Anfang bis Ende mitteilbar. Auch die verlangte Beschaffenheit der Endformel, daß sie „$0 \neq 0$" lautet, ist eine konkret feststellbare Eigenschaft des Beweises. Tatsächlich läßt sich dieser Nachweis erbringen, und damit gewinnen wir die Berechtigung zur Einführung unserer idealen Aussagen. Zugleich erkennen wir, daß wir damit ein Problem lösen, das längst brennend geworden ist, nämlich das Problem, die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome zu beweisen.

Überall, wo die axiomatische Methode zur Anwendung kommt, liegt uns der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome ob. In der

Geometrie und den physikalischen Theorien gelingt dieser Nachweis durch Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome. Diese Methode versagt offenbar bei der Arithmetik selbst. Indem unsere Beweistheorie auf Grund der Methode der idealen Elemente diesen letzten wichtigen Schritt ermöglicht, bildet sie den notwendigen Schlußstein der Axiomatik.

Für jede neue Theorie ist der endgültige Prüfstein ihr Erfolg in Fragen, die schon vorher da waren und zu deren Beantwortung allein sie gar nicht geschaffen worden ist. Sobald CANTOR seine ersten transfiniten Zahlen, die sogenannten Zahlen der zweiten Zahlklasse, entdeckt hatte, entstand die Frage, ob man durch dieses transfinite Zählen auch wirklich anderwärts bekannte Mengen auszählen kann, die in gewöhnlichem Sinne nicht abzählbar sind. Als solche Menge kam in erster Linie die Punktstrecke in Betracht. Diese Frage, ob durch die Zahlen der zweiten Zahlenklasse die Punkte der Strecke, d. h. die reellen Zahlen, sich auszählen lassen, ist das berühmte Kontinuumproblem, von CANTOR aufgestellt, aber nicht gelöst. Ich habe in einer Abhandlung „Über das Unendliche“ gezeigt, wie dieses Problem einer erfolgreichen Behandlung durch unsere Beweistheorie zugänglich wird.

Um zu zeigen, daß es sich bei diesem CANTORschen Kontinuumssatz um ein ganz konkretes Problem der gewöhnlichen Analysis handelt, erwähne ich noch, daß derselbe sich als Formel folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$(Eh)\Big\{(f)(\Phi(f) \rightarrow N h(f)) \\ \& \ (f)(g)\Big[\Phi(f) \& \Phi(g) \rightarrow \big((h(f) = h(g)) \rightarrow \, = (f,g)\big)\Big]\Big\},$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi(f) \text{ für } (a)\big(Z(a) \rightarrow Zf(a)\big)$$

und ferner

$$= (f,g) \text{ für } (a)\big(Z(a) \rightarrow (f(a) = g(a))\big)$$

gesetzt ist.

In dieser Formel tritt noch die zu der Grundvariablen der zweiten Zahlenklasse gehörige Aussage N auf. Dies läßt sich aber vermeiden, da die Zahlen der zweiten Zahlenklasse bekanntermaßen durch Wohlordnungen der Zahlenreihe, d. h. durch gewisse Funktionen zweier Zahlenvariablen mit den Werten 0,1, dargestellt werden können, so daß der fragliche Satz die Form eines reinen Funktionensatzes annimmt.

Die Grundzüge dieser meiner Beweistheorie habe ich bereits bei verschiedenen Gelegenheiten, in Kopenhagen, hier in Hamburg, in Leipzig und in Münster dargelegt; es sind inzwischen gegen diese Beweistheorie

mannigfache Ausstellungen und Einwände gemacht worden, die ich samt und sonders für so ungerecht wie nur möglich halte. Ich möchte einige derselben jetzt beleuchten.

Schon POINCARÉ hatte an verschiedenen Stellen Ausführungen gemacht, die meiner Auffassung entgegengesetzt sind, vor allem bestritt er von vornherein die Möglichkeit eines Beweises der Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome, indem er behauptete, daß die Widerspruchsfreiheit des Verfahrens der vollständigen Induktion nie anders als wieder durch das Induktionsverfahren bewiesen werden könnte. Aber wie meine Theorie zeigt, kommen hier, bei der Begründung der Arithmetik, zweierlei rekursiv verfahrende Methoden in Betracht, nämlich einerseits der anschauliche Aufbau der ganzen Zahl als Zahlzeichen, dem auch rückwärts der Abbau eines vorliegenden Zahlzeichens bzw. der Abbau einer analog einem Zahlzeichen aufgebauten konkret vorliegenden Figur entspricht — die inhaltliche Induktion, und andererseits die eigentliche formale Induktion, die sich auf das Induktionsaxiom stützt und durch die allein erst die mathematische Variable ihre Rolle im Formalismus zu spielen imstande ist.

POINCARÉ gewinnt seine irrige Überzeugung dadurch, daß er zwischen diesen beiden völlig verschieden gearteten Induktionsmethoden nicht unterscheidet. — POINCARÉ, dieser ideenreichste und fruchtbarste Mathematiker seiner Generation, hatte bedauerlicherweise gegen die CANTORsche Theorie eine ausgesprochene Voreingenommenheit, die ihn an der gerechten Beurteilung der großartigen Konzeptionen CANTORS hinderte. Unter diesen Umständen mußte POINCARÉ meine Theorie — diese lag übrigens damals nur in den ersten und völlig unzureichenden Anfängen vor — ablehnen. POINCARÉs Autorität hat die jüngere Generation vielfach in einseitigem Sinne beeinflußt.

Eine andere Opposition gegen meine Theorie geht von den Anhängern der Grundlagentheorie von RUSSELL und WHITEHEAD aus, welche die Prinzipia mathematica als eine endgültig befriedigende Begründung der Mathematik ansehen.

Die Grundlagentheorie von RUSSELL und WHITEHEAD ist eine allgemeine, großzügig angelegte logische Untersuchung. Indes beruht die Begründung der Mathematik darin einerseits auf dem Unendlichkeits-Axiom und dann auf dem sogenannten Reduzierbarkeits-Axiom, und diese Axiome sind beide echte, inhaltliche nicht durch einen Beweis der Widerspruchsfreiheit gestützte Annahmen — Annahmen, deren Allgemeingültigkeit sogar zweifelhaft bleibt und deren jedenfalls meine Theorie nicht bedarf.

Dem RUSSELLschen Axiom der Reduzierbarkeit steht in meiner Theorie die Regel der Behandlung der Funktionsvariablen gegenüber.

In meiner Theorie wird aber die Reduzierbarkeit nicht vorausgesetzt, sondern vielmehr als kompensabel erkannt: nur im Falle eines vorliegenden Beweises für einen Widerspruch wird die Ausführung der Reduktion erfordert, und meine Beweistheorie lehrt, daß dann auch diese Reduktion immer gelingen müßte.

Was nun die Untersuchungen der neuesten Zeit betrifft, so erfreut mich an sich aufs höchste die Tatsache, daß der Sinn und das Interesse für Grundlagenforschung wieder so lebhaft erwacht ist; aber wenn ich den Inhalt und die Ergebnisse dieser Untersuchungen mir vergegenwärtige, so kann ich ihrer Tendenz meist nicht zustimmen; ich empfinde dieselben vielmehr zu einem großen Teile als rückständig, wie wenn sie aus einer Zeit kämen, in der die gewaltige Gedankenwelt CANTORS noch unentdeckt war.

Darin sehe ich auch den Grund, warum diese neusten Untersuchungen an die großen Probleme der Grundlagentheorie, z. B. an die Frage des Aufbaus der Funktionen, an den Beweis bzw. die Widerlegung des CANTORschen Kontinuumssatzes, an die Frage der Lösbarkeit aller mathematischen Probleme, die Frage, betreffend die Äquivalenz von Widerspruchsfreiheit und Existenz mathematischer Gebilde gar nicht einmal herankommen.

Den weitesten Raum in der heutigen Literatur über die Grundlagen der Mathematik nimmt diejenige Lehre ein, die BROUWER aufgestellt und die er Intuitionismus genannt hat. Nicht aus Neigung zur Polemik, sondern um meine Ansichten klar zum Ausdruck zu bringen und um mißverständlichen Auffassungen meiner eigenen Theorie vorzubeugen, muß ich auf gewisse Behauptungen BROUWERS näher eingehen.

BROUWER erklärt die Existenzaussagen an sich samt und sonders für bedeutungslos, sofern sie nicht zugleich die Konstruktionen der als existierend behaupteten Gebilde enthalten, für wertlose Papiere: durch sie arte die Mathematik in ein Spiel aus.

Als Beispiel dafür, wie der bloße, mit der logischen ε-Funktion geführte Existenzbeweis keineswegs ein wertloses Papierstück ist, möge folgendes dienen:

Zur Begründung eines Ausspruches von GAUSS, wonach ein Hinausgehen über die gewöhnlichen, mit i gebildeten imaginären Zahlen für die Analysis überflüssig ist, hatten WEIERSTRASS und DEDEKIND Untersuchungen angestellt, die auch zur Aufstellung und zum Beweise gewisser Theoreme geführt haben. Ich habe nun seinerzeit ein allgemeines Theorem über algebraische Formen aufgestellt, das ein reiner Existenzsatz ist und seiner Natur nach gar nicht in einen Satz über Konstruierbarkeit verwandelt werden kann. Allein durch Anwendung dieses Existenz-

theorems habe ich[2]) die langwierigen und undurchsichtigen Überlegungen von WEIERSTRASS und die höchst komplizierten Rechnungen von DEDEKIND vermieden, und zudem deckt, wie ich glaube, mein Beweis erst den inneren Grund für die Gültigkeit der im Sinne von GAUSS liegenden, von WEIERSTRASS und DEDEKIND aufgestellten Behauptungen auf.

Aber auch wer sich mit der Widerspruchsfreiheit nicht begnügt und noch weitergehende Gewissensskrupel hat, muß die Bedeutung des Beweises der Widerspruchsfreiheit anerkennen, nämlich als einer allgemeinen Methode aus Beweisen für allgemeine Sätze vom Charakter etwa des FERMATschen Satzes, die mit Hilfe der ε-Funktion geführt sind, finite Beweise zu gewinnen.

Nehmen wir beispielsweise an, daß wir den Beweis für den großen Fermatschen Satz mit Hülfe der logischen Funktion ε gefunden hätten. Aus demselben kann man dann auf folgende Weise einen finiten Beweis machen:

Angenommen, es lägen Zahlzeichen

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ (\mathfrak{p} > 2)$$

vor, welche die Fermatsche Gleichung

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{p}}$$

erfüllen, so könnten wir diese Gleichung auch als beweisbare Formel erhalten, indem wir die Feststellung der Übereinstimmung der Zahlzeichen

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}^{\mathfrak{p}} \text{ und } \mathfrak{c}^{\mathfrak{p}}$$

in die Form eines Beweises bringen. Andererseits hätten wir nach unserer Annahme einen Beweis für die Formel

$$(\boldsymbol{Z}a \mathbin{\&} \boldsymbol{Z}b \mathbin{\&} \boldsymbol{Z}c \mathbin{\&} \boldsymbol{Z}p \mathbin{\&} (p > 2)) \rightarrow (a^p + b^p \neq c^p)$$

aus der durch Einsetzung und Schluß

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{p}} + \mathfrak{p}^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{c}^{\mathfrak{p}}$$

erhalten wird. Es wäre also sowohl

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{p}}$$

wie auch

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{c}^{\mathfrak{p}}$$

---

[2]) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. Gött. Nachr. 1896.

beweisbar. Dies kann aber, wie der Beweis der Widerspruchsfreiheit auf finitem Wege zeigt, nicht der Fall sein.

Die angeführten Beispiele sind aber nur beliebig herausgegriffene Einzelfälle. In Wahrheit ist die Mathematik angefüllt mit Beispielen, die die BROUWERschen Behauptungen, betreffend die Existenzsätze, widerlegen.

Wie ist nun hinsichtlich des Vorwurfes, daß die Mathematik in ein Spiel ausarte, die wirkliche Sachlage?

Die Quelle der reinen Existenztheoreme ist das logische ε-Axiom, auf dem wiederum der Aufbau der gesamten idealen Aussagen beruht. Und welches ist der Erfolg des hierdurch ermöglichten Formelspieles? Dieses Formelspiel gestattet, den gesamten Gedankeninhalt der mathematischen Wissenschaft einheitlich auszudrücken und derart zu entwickeln, daß zugleich die Zusammenhänge der einzelnen Sätze und Tatsachen deutlich werden. Die Forderung, wonach dabei jede einzelne Formel für sich allein deutbar sein soll, allgemein aufzustellen, ist keineswegs vernünftig; im Gegenteil entspricht es dem Wesen einer Theorie, daß man in einer Entwickelung nicht nötig hat, zwischendurch noch auf die Anschauung oder Bedeutung zurückzugreifen. Der Physiker verlangt gerade von einer Theorie, daß ohne Heranziehung anderweitiger Bedingungen aus den Naturgesetzen oder Hypothesen die besonderen Sätze allein durch Schlüsse, also auf Grund eines reinen Formelspieles, abgeleitet werden. Nur gewisse Kombinationen und Folgerungen der physikalischen Gesetze können durch das Experiment kontrolliert werden — sowie in meiner Beweistheorie nur die realen Aussagen unmittelbar einer Verifikation fähig sind. Das Wertvolle der reinen Existenzbeweise besteht gerade darin, daß durch sie die einzelne Konstruktion eliminiert wird und viele verschiedene Konstruktionen durch einen Grundgedanken zusammengefaßt werden, so daß allein das für den Beweis Wesentliche deutlich hervortritt: Abkürzung und Denkökonomie sind der Sinn der Existenzbeweise. Die reinen Existenzsätze sind dann auch tatsächlich die wichtigsten Marksteine in der geschichtlichen Entwickelung unserer Wissenschaft gewesen. Aber solche Erwägungen fechten den gläubigen Intuitionisten nicht an.

Das Formelspiel, über das BROUWER so wegwerfend urteilt, hat außer dem mathematischen Wert noch eine wichtige allgemeine philosophische Bedeutung. Dieses Formelspiel vollzieht sich nämlich nach gewissen bestimmten Regeln, in denen die *Technik unseres Denkens* zum Ausdruck kommt. Diese Regeln bilden ein abgeschlossenes System, das sich auffinden und endgültig angeben läßt. Die Grundidee meiner Beweistheorie ist nichts anderes, als die Tätigkeit unseres Verstandes zu beschreiben, ein Protokoll über die Regeln aufzunehmen, nach denen unser Denken tatsächlich verfährt. Das Denken

geschieht eben parallel dem Sprechen und Schreiben, durch Bildung und Aneinanderreihung von Sätzen. Wenn irgendwo eine Gesamtheit von Beobachtungen und Erscheinungen verdient, zum Gegenstand einer ernsten und gründlichen Forschung gemacht zu werden, so ist es diese hier — liegt es doch in der Aufgabe der Wissenschaft, uns von Willkür, Gefühl und Gewöhnung freizumachen und vor dem Subjektivismus zu bewahren, der sich schon in den Anschauungen KRONECKERS bemerkbar gemacht hat und der, wie mir scheint, in dem Intuitionismus seinen Gipfelpunkt erreicht.

Die schärfste und leidenschaftlichste Kampfansage des Intuitionismus ist diejenige, die er gegen die Gültigkeit des Tertium non datur z. B. im einfachsten Falle gegen die Schlußweise richtet, derzufolge eine Behauptung, in welcher eine Zahlenvariable vorkommt, entweder für alle ganzzahligen Werte derselben richtig ist oder es eine Zahl gibt, für welche jene Behauptung falsch ist. Dieses Tertium non datur ist eine Folgerung aus dem logischen ε-Axiom und hat noch niemals den geringsten Fehler hervorgerufen. Es ist zudem so klar und faßlich, daß eine mißbräuchliche Anwendung ausgeschlossen ist. Insbesondere trägt das Tertium non datur an dem Zustandekommen der bekannten Paradoxien der Mengenlehre nicht die geringste Schuld; diese Paradoxien kommen vielmehr lediglich dadurch zustande, daß man unzulässige und sinnlose Begriffsbildungen benutzt — wie sie in meiner Beweistheorie sich von selbst ausschließen. Die Existenzbeweise mittels des Tertium non datur haben meist einen besonderen Reiz wegen ihrer überraschenden Kürze und Eleganz. Dieses Tertium non datur dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte. Das Verbot der Existenzsätze und des Tertium non datur kommt ungefähr dem Verzicht auf die mathematische Wissenschaft überhaupt gleich. Denn was wollen die kümmerlichen Reste, die wenigen unvollständigen und unzusammenhängenden Einzelresultate, die von den Intuitionisten ohne den Gebrauch des logischen ε-Axioms erarbeitet worden sind, gegenüber der gewaltigen Ausdehnung der modernen Mathematik bedeuten! Die Lehrsätze in der Funktionentheorie, um nur irgendwelche Beispiele aus unserer Wissenschaft herauszugreifen, die Theorie der konformen Abbildung, die fundamentalen Theoreme in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen oder der FOURIERschen Reihen sind lediglich ideale Aussagen in meinem Sinne und bedürfen zu ihrer Entwicklung des logischen ε-Axioms.

Ich staune unter diesen Umständen darüber, daß ein Mathematiker an der strengen Gültigkeit der Schlußweise des Tertium non datur zweifelt. Ich staune noch mehr darüber, daß, wie es scheint, eine

ganze Gemeinde von Mathematikern sich heute zusammengefunden hat, die das gleiche tut. Ich staune am meisten über die Tatsache, daß überhaupt auch im Kreise der Mathematiker die Suggestivkraft eines einzelnen temperamentvollen und geistreichen Mannes die unwahrscheinlichsten und exzentrischsten Wirkungen auszuüben vermag.

Auch die Skizze meines Beweises des CANTORschen Kontinuumsatzes ist nicht ohne Kritik geblieben. Ich möchte daher zu diesem Beweise des Kontinuumssatzes einige Bemerkungen machen.

Was zunächst das Lemma I betrifft, welches ich dort ohne Beweis gebrauche, so ist dieses zur Fixierung des Gedankenganges zwar sehr nützlich, aber für den Beweis selbst erläßlich. Denn die Abzählbarkeit der Gebilde, die bis zu einer bestimmten Höhe der Variablengattungen sich herstellen lassen, wird durch die Hinzunahme der ε-Funktionen nicht geändert.

Man kann übrigens auch diese ε-Funktionen in bestimmter Weise normieren. Z. B. braucht man im Bereich der Zahlenvariablen an Stelle der allgemeinen ε-Funktion $\varepsilon(A)$, deren Wert ein Beispiel für das eventuelle Zutreffen der Aussage A ist, nur die spezielle Funktionen-Funktion $\varepsilon(f)$ zu nehmen, welche 0 ist, wenn $f(a)$ stets $= 0$ ist und sonst ein Beispiel einer Zahl a darstellt, für die $f(a) \neq 0$ ausfällt.

Von dieser Funktionen-Funktion bin ich ursprünglich auch ausgegangen, als ich das Tertium non datur in Verbindung mit der Auswahl formalisieren wollte.

Zur Erläuterung des von mir ebenfalls nicht bewiesenen Lemmas II und zugleich zur Beleuchtung meiner Auffassung von den Zahlen der zweiten Zahlenklasse will ich folgenden Satz erwähnen, der mit in der Behauptung des Lemmas eingeschlossen ist. Liegt für eine bestimmte Zahl der zweiten Zahlenklasse eine Definition mit Hilfe transfiniter Rekursion vor, so kann man aus dieser auch eine Definition jener Zahl gewinnen, in der lediglich die gewöhnliche, nach einer Zahlenvariablen fortschreitende Rekursion benutzt wird. Der Sinn dieses Satzes ist, daß eine rekursiv definierte Funktion einer Zahl der zweiten Zahlenklasse sich an einer gegebenen Stelle berechnen läßt — ebenso wie eine zahlentheoretische Funktion, die durch Rekursion definiert ist, für einen gegebenen Zahlwert stets berechnet werden kann.

Die Schwierigkeit bei dem Nachweis hierfür ist vor allem die, zu zeigen, daß, wenn eine Folge $\alpha(n)$ von Zahlen der zweiten Zahlenklasse durch eine Rekursion

$$\alpha(n') = \varphi(\alpha(n))$$

gegeben ist, wobei φ mit Hilfe transfiniter Rekursion definiert ist, diese transfinite Rekursion eliminiert werden kann.

In bestimmten Fällen ist die Durchführung dieser Elimination gelungen. Beispiele dafür sind die erste ε-Zahl und die erste kritische ε-Zahl, wie sie CANTOR eingeführt und bezeichnet hat.

Die erste ε-Zahl ist der Limes der Folge $\alpha(n)$, wo

$$\alpha(0) = \omega$$
$$\alpha(n') = \omega^{\alpha(n)} \qquad (n \text{ gewöhnliche Zahl})$$

und ω^α in üblicher Weise durch transfinite Rekursion definiert wird.

Unter einer ε-Zahl versteht man nach CANTOR eine solche Zahl α, für die

$$\alpha = \omega^\alpha$$

ist. Bei der Definition der ersten ε-Zahl durch gewöhnliche Rekursion braucht man schon Variablengattungen mit Nummern:

$$N_0(a) \sim N(a)$$
$$N_{n'}(a) \sim (b)\Big(N_n(b) \rightarrow N_n\big(a(b)\big)\Big).$$

W. ACKERMANN ist kürzlich ein erheblicher Fortschritt in dem Beweise der Widerspruchsfreiheit gelungen. Ich möchte mit einem ganz kurzen Referat darüber meinen Vortrag beendigen.

Bei dem Beweise der Widerspruchsfreiheit für die ε-Funktion kommt es darauf an zu zeigen, daß aus einem vorgelegten Beweis von $0 \neq 0$ die ε-Funktion sich eliminieren läßt, in dem Sinne, daß die mit ihr gebildeten Figuren durch Zahlzeichen ersetzt werden können derart, daß die Formeln, die durch Einsetzung aus dem logischen Auswahlaxiom hervorgehen, die „kritischen Formeln", vermöge jener Ersetzungen in „richtige" Formeln übergehen.

Diese Ersetzungen werden nach erfolgter Elimination der freien Variablen durch schrittweises Probieren gefunden, und es muß gezeigt werden, daß dieser Prozeß jedenfalls zu einem Abschluß führt.

Wir machen hier folgende speziellen Voraussetzungen:

1. Als Zeichen für individuelle Aussagen sollen nur

$$Z \text{ und } =$$

vorkommen.

2. Die Figuren, die als Argumente stehen — wir nennen sie „Funktionale" — sollen, soweit sie von der ε-Funktion frei sind, entweder selbst Zahlzeichen oder aus solchen aufgebaut sein mit Hilfe von Zeichen für Funktionen, die durch Rekursions-Axiome definiert sind.

Für den Fall, daß nur ein mit ε gebildetes Funktional und nur eine einzige kritische Formel vorkommt, ist die Endlichkeit des Prozesses der schrittweisen Ersetzungen folgendermaßen ersichtlich: sei

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{A}\,\varepsilon_a\,\mathfrak{A}\,a$$

die kritische Formel (wobei in $\mathfrak{k}$ ev. auch $\varepsilon_a\,Aa$ vorkommen kann). Wir ersetzen zunächst überall $\varepsilon_a\,Aa$ durch 0.

Dann werden alle Funktionale von der ε-Funktion frei, wir können alles ausrechnen und erhalten für die Funktionale Zahlwerte. Die Elementar-Aussagen können nunmehr als „richtige“ und „falsche“ unterschieden werden, indem jede Z-Aussage als richtig gilt und bei den Gleichungen die Übereinstimmung der beiderseitigen Zahlzeichen maßgebend ist. An Stelle der kritischen Formel bekommen wir

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{A}\,0.$$

Diese Formel ist entweder richtig; dann sind wir am Ziel, oder

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{z}$$

ist richtig. Wir haben dann also ein Beispiel $\mathfrak{z}$ für das Zutreffen von $\mathfrak{A}$ gefunden.

Dann machen wir eine neue Ersetzung, indem wir $\varepsilon_a\,Aa$ überall durch das Zahlzeichen $\mathfrak{z}$ ersetzen.

Führen wir nunmehr die Berechnung aller Funktionale aus, so geht die kritische Formel in eine Formel

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{z}_1 \rightarrow \mathfrak{A}\,\mathfrak{z}$$

über, die jedenfalls richtig ist.

Wenn mehrere ε-Funktionen auftreten, so können diese in komplizierter Weise verkoppelt sein, und zwar einerseits in der Form der „Einlagerung“ z. B.

$$\varepsilon_a\,\mathfrak{A}\,(a, \varepsilon_b\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{b}),$$

wobei $\varepsilon_b\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{b}$ von der Variablen a frei ist, oder in der Form der „Überordnung“

$$\varepsilon_a\,\mathfrak{A}\,(a, \varepsilon_b\,\mathfrak{K}\,(a, b)).$$

Im Falle der bloßen Einlagerung entsteht noch keine prinzipielle Schwierigkeit. Wir haben darauf zu achten, daß wir die Ersetzungen von innen her ausführen und daß wir dem Gleichheits-Axiom Rechnung tragen dadurch, daß wir z. B. bei zwei ε-Figuren

$$\varepsilon_a\,\mathfrak{A}\,(a, \varepsilon_b\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{b})$$

$$\varepsilon_a\,\mathfrak{A}\,(a, \varepsilon_b\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{b})$$

im Falle gleicher Ersetzungen für $\varepsilon_b\, \mathfrak{C}\, \mathfrak{b}$ und $\varepsilon_b\, \mathfrak{K}\, \mathfrak{b}$ auch das äußere ε in gleicher Weise ersetzen.

Solange die Ersetzungen für die inneren ε ungeändert bleiben, sind die für die äußeren ε gefundenen Beispiele definitiv. Sie können also nur dadurch unbrauchbar werden, daß für ein inneres ε ein neues Beispiel gefunden wird.

Somit dringt man mit der Auffindung von Beispielen für die ε — sofern das Verfahren nicht schon vorher zum Abschluß kommt — immer weiter nach innen, so daß schließlich für die innersten ε Beispiele gefunden werden; diese Beispiele sind dann definitiv, und der Maximalgrad der Überlagerung ist damit um 1 vermindert.

Man kann die Gesamtzahl der Ersetzungsschritte, die höchstens erforderlich ist, um alle kritischen Formeln in richtige zu verwandeln, an der Hand der vorgelegten Beweisfigur von vornherein in einfacher Weise abschätzen, — wodurch der finite Charakter der Überlegung ersichtlich wird.

Schwieriger ist der Fall der Überordnung. Will man hier die Ersetzung von innen her ausführen, so kann man z. B. bei

$$\varepsilon_a\, \mathfrak{A}\, (a, \varepsilon_b\, \mathfrak{K}\, (a, b))$$

das innere ε: $\varepsilon_b\, \mathfrak{K}\, (a, b)$ nicht durch eine Zahl, sondern nur durch eine Funktion ersetzen. Als Ersetzungsfunktionen braucht man nur solche zu nehmen, die, abgesehen von endlich vielen Stellen, stets den Wert 0 haben. Man beginnt immer mit der Funktion, die stets den Wert 0 hat („Nullersetzung“).

Es ist nun keineswegs ohne weiteres ersichtlich, kann aber bewiesen werden, daß auch in diesem Falle das Verfahren der Ersetzungen zu einem Abschluß führt, und man bekommt wiederum eine elementare Abschätzung für die Zahl der erforderlichen Schritte. Wesentlich ist dabei, daß man jedesmal, wenn für die inneren ε eine neue Funktionsersetzung gemacht ist, die Ersetzung der äußeren ε wieder von neuem mit der Nullersetzung beginnen muß.

Vorausgesetzt ist bei diesem Endlichkeitsbeweis, daß die ε nur direkt in der Beweisfigur, aber nicht auch in den zur Definition von Funktionen eingeführten Rekursions-Axiomen auftreten.

Aus meinen Darlegungen erkennen Sie, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit es ist, der den Wirkungsbereich meiner Beweistheorie bestimmt und überhaupt den Kern derselben ausmacht. Die Methode von W. Ackermann gestattet noch eine weitere Ausdehnung. Für die Begründung der üblichen Analysis ist der Ansatz von ihm so weit entwickelt, daß die verbleibende Aufgabe nur noch in der Ausführung eines

rein mathematischen Endlichkeitsbeweises besteht. Schon jetzt möchte ich als Schlußergebnis die Behauptung aussprechen: die Mathematik ist eine voraussetzungslose Wissenschaft. Zu ihrer Begründung brauche ich weder den lieben Gott, wie KRONECKER, noch die Annahme einer besonderen auf das Prinzip der vollständigen Induktion abgestimmten Fähigkeit unseres Verstandes, wie POINCARÉ, noch die BROUWERsche Urintuition und endlich auch nicht, wie RUSSELL und WHITEHEAD, Axiome der Unendlichkeit, Reduzierbarkeit oder der Vollständigkeit, die ja wirkliche inhaltliche und durch Beweise der Widerspruchsfreiheit nicht kompensierbare Voraussetzungen sind.

Ich möchte noch bemerken, daß P. BERNAYS mir wiederum ein treuer Mitarbeiter gewesen ist: er hat mich nicht nur durch Ratschläge fortgesetzt unterstützt, sondern auch eigene Gedanken und neue Gesichtspunkte hinzugefügt, so daß ich das Werk als unser gemeinsames bezeichnen möchte. Wir beabsichtigen demnächst eine ausführliche Darstellung der Theorie erscheinen zu lassen.

Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik.

Von H. WEYL in Zürich.

Zur Verteidigung des Intuitionismus mögen mir zunächst ein paar Worte gestattet sein.

Bevor HILBERT seine Beweistheorie aufstellte, wurde von Allen die Mathematik als ein System inhaltlicher, sinnerfüllter, einsichtiger Wahrheiten aufgefaßt; dieser Standpunkt war die gemeinsame Plattform aller Diskussionen. Wenn POINCARÉ die *vollständige Induktion* als ein letztes Fundament des mathematischen Denkens in Anspruch nahm, das sich auf nichts Ursprünglicheres zurückführen lasse, so hatte er gerade jenes in voller Anschaulichkeit sich vollziehende Aufbauen und Abbauen der Zahlzeichen im Auge, von dem auch HILBERT in seinen inhaltlichen Überlegungen Gebrauch macht. Denn auch bei ihm handelt es sich ja nicht etwa bloß um $0'$ oder $0'''$, sondern um *irgendein* $0''^{\cdots\prime}$, um ein *beliebiges in concreto vorliegendes* Zahlzeichen. Man mag hier das „in concreto vorliegend" betonen; es ist auf der andern Seite aber ebenso wesentlich, daß die inhaltlichen Gedankengänge der Beweistheorie *in hypothetischer Allgemeinheit*, an *irgendeinem* Beweis, an *irgendeinem* Zahlzeichen durchgeführt werden. Dies soll natürlich kein Einwand sein, denn dies Verfahren des „eins nach dem andern" kann sich auf unerschütterliche anschauliche Evidenz berufen; aber man darf es doch namhaft machen, nicht als „Axiom", sondern in seinem konkreten Gebrauch, trotz und in all seiner Evidenz und Ursprünglichkeit, und erblickt wohl in ihm mit Recht das eigentümliche Merkmal des inhaltlichen *mathematischen* Denkens. Mir scheint, daß in diesem Punkte die HILBERTsche Beweistheorie POINCARÉ vollständig recht gibt. Daß in HILBERTS formalisierter Mathematik das Prinzip der vollständigen Induktion in der PEANO-DEDEKINDschen Fassung als ein Axiom auftritt, dessen widerspruchsfreie Verträglichkeit mit den übrigen Axiomen durch inhaltliche Überlegungen sicherzustellen ist, ist natürlich eine ganz andere Sache, mit der es aber POINCARÉ gar nicht zu tun hatte.

BROUWER forderte wie alle Welt von der Mathematik, daß ihre Sätze (in Hilberts Ausdrucksweise) „reale Aussagen" seien, sinnerfüllte Wahrheiten. Aber er sah zum erstenmal genau und in vollem Umfang, wie sie tatsächlich diese Grenzen des inhaltlichen Denkens überall weit überschritten hatte. Ich glaube, für diese Erkenntnis der Grenzen des inhaltlichen Denkens sind wir ihm alle zu Dank verpflichtet. In den inhaltlichen Überlegungen, welche die Widerspruchsfreiheit der formalisierten Mathematik sicherstellen sollen, werden von HILBERT diese

Grenzen, und zwar selbstverständlicherweise, durchaus respektiert; es handelt sich hier wirklich in keiner Weise um künstliche Verbote. Danach erscheint mir auch die Gefolgschaft, welche BROUWERS Ideen fanden, nicht sonderbar; sein Standpunkt ergab sich mit Notwendigkeit aus einer These, die von allen Mathematikern vor der Aufstellung von HILBERTS formalen Ansätzen geteilt wurde, und einer grundlegenden neuen unbezweifelbaren, auch von HILBERT anerkannten logischen Einsicht. Daß von diesem Standpunkt aus nur ein Teil, vielleicht nur ein kümmerlicher Teil der klassischen Mathematik zu halten ist, ist eine bittere, aber unumgängliche Tatsache. HILBERT ertrug diese Verstümmelung nicht. Und es ist wiederum eine Sache für sich, daß es ihm gelang, die klassische Mathematik *durch eine radikale Umdeutung ihres Sinnes* ohne Minderung ihres Bestandes zu retten, nämlich durch ihre Formalisierung, durch welche sie, prinzipiell gesprochen, sich aus einem System einsichtiger Erkenntnisse verwandelt in ein nach festen Regeln sich vollziehendes Spiel mit Formeln.

Der ungeheuren Bedeutung und Tragweite dieses HILBERTschen Schrittes, der offenbar unter dem Druck der Umstände notwendig geworden ist, möchte ich mich nun keineswegs verschließen. Uns alle, die wir dieser Entwicklung beiwohnten, erfüllt mit Bewunderung die geniale Folgerichtigkeit, mit welcher HILBERT durch seine Beweistheorie der formalisierten Mathematik sein axiomatisches Lebenswerk krönte. Auch in der erkenntnistheoretischen Einschätzung der dadurch geschaffenen neuen Situation, trennt, wie ich mit großer Freude konstatiere, nichts mich von HILBERT. Er machte zunächst geltend, daß der Durchgang durch die idealen Aussagen ein legitimes formales Hilfsmittel ist zum Beweise von realen Aussagen; das muß sogar der strengste Intuitionist anerkennen. Ob diese ihre Rolle den Aufwand der ganzen Beweistheorie lohnen würde, darf man vielleicht noch bezweifeln (es ist das lediglich eine Frage der Ökonomie). Denn in den meisten Fällen liegt die Schwierigkeit nicht so sehr in der Auffindung des finiten Beweises als darin, die Sätze der klassischen Mathematik überhaupt durch reale, für den Intuitionisten akzeptable Urteile auszufüllen. Um dies z. B. für den Fundamentalsatz der Algebra von der Wurzelexistenz zu leisten, muß man die *finite Konstruktion* angeben, vermöge deren die von Schritt zu Schritt sich genauer bestimmenden Koeffizienten einen analogen Entwicklungsprozeß der Wurzelwerte auslösen; ist diese Konstruktion einmal gefunden, so ist es leicht, einzusehen, daß die von ihr mit immer höherer Approximation gelieferten Werte tatsächlich die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.

Aber HILBERT wies weiter mit Nachdruck auf die benachbarte Wissenschaft der *theoretischen Physik* hin. Ihren einzelnen Setzungen und

Gesetzen ist kein in der Anschauung unmittelbar zu erfüllender Sinn eigen, eine Konfrontation mit der Erfahrung vertragen, prinzipiell gesprochen, nicht die isoliert genommenen Aussagen der Physik, sondern nur das theoretische System als Ganzes. Was hier geleistet wird, ist nicht anschauende Einsicht in singuläre oder allgemeine Sachverhalte und eine das Gegebene treu nachzeichnende *Deskription*, sondern theoretische, letzen Endes rein symbolische *Konstruktion* der Welt. Man hat gesagt, die Physik habe es nur mit der Feststellung von Koïnzidenzen zu tun; insbesondere hat MACH auf dem Felde der Physik einem reinen Phänomenalismus das Wort geredet. Aber wenn man ehrlich ist, so muß man doch zugestehen, daß unser theoretisches Interesse nicht ausschließlich und nicht einmal in erster Linie an den „realen Aussagen" hängt, an den Konstatierungen, daß dieser Zeiger mit diesem Skalenteil sich deckt, sondern vielmehr an den idealen Setzungen, die *laut Theorie* in solchen Koïnzidenzen sich ausweisen, deren Sinn selbst aber in keiner gebenden Anschauung sich unmittelbar erfüllt, — wie z. B. der Setzung des Elektrons als eines universellen elektrischen Elementarquantums. Nach HILBERT sprengt schon die reine Mathematik den Rahmen der einsichtig feststellbaren Sachverhalte durch solche ideale Setzungen.

Es ist eine tiefe philosophische Frage, welches die „Wahrheit" oder Objektivität ist, die dieser über das Gegebene weit hinausdrängenden theoretischen Weltgestaltung zukommt. Sie hängt eng mit der andern Frage zusammen, was uns dazu treibt, gerade dies bestimmte von HILBERT entwickelte Axiomensystem zugrunde zu legen; die Widerspruchsfreiheit ist dafür wohl ein notwendiges, aber kein hinreichendes Argument. Vorläufig kann man darauf kaum anders antworten als mit dem Glauben an die Vernünftigkeit der Geschichte, die diese Bildungen in einem lebendigen geistigen Entwicklungsprozeß hervortrieb — ohne daß freilich die Träger der Entwicklung, durch vermeintliche Evidenz geblendet, der Willkür und Kühnheit ihrer Konstruktion sich bewußt waren. Auch HILBERTS Berufung auf den praktischen Erfolg der Methode scheint mir von einem solchen Glauben getragen. Oder ist seine Meinung die, daß, je mehr der Axiomenbau seiner Vollendung sich nähert, in um so höherem Maße die Willkür wieder ausgeschieden wird und das eindeutig Zwingende hervortritt? Setzt sich die HILBERTsche Auffassung, wie das allem Anschein nach der Fall ist, gegenüber dem Intuitionismus durch, *so erblicke ich darin eine entscheidende Niederlage der philosophischen Einstellung reiner Phänomenologie,* die damit schon auf dem primitivsten und der Evidenz noch am ehesten geöffneten Erkenntnisgebiet, in der Mathematik, sich als unzureichend für das Verständnis schöpferischer Wissenschaft erweist.

Zusatz zu Hilberts Vortrag über „Die Grundlagen der Mathematik".

Von P. Bernays in Göttingen.

1. Zur Ergänzung der vorstehenden Abhandlung seien einige näheren Ausführungen über den dort angedeuteten Ackermannschen Beweis der Widerspruchsfreiheit nachgetragen.

Was zunächst, beim *Fall der Einlagerung*, die Abschätzung für die Höchstzahl der Ersetzungsschritte betrifft, so wird eine solche durch

$$2^n$$

geliefert, wobei n die Anzahl der gestaltlich verschiedenen ε-Funktionale bedeutet. Die geschilderte Beweismethode liefert noch eine wesentlich schärfere Abschätzung, welche z. B. für den Fall, daß gar keine Einlagerung vorkommt, die Höchstzahl

$$n+1$$

ergibt.

2. Die Betrachtung, durch die man beim *Fall der Überordnung* die Endlichkeit des Verfahrens erkennt, möge unter einfachen spezialisierenden Annahmen durchgeführt werden.

Die Annahmen sind folgende: Die im Beweis vorkommenden ε-Funktionale seien

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$$

und

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \qquad \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_2, b), \cdots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b),$$

worin

$$\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$$

das $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$ enthalten können, aber sonst kein ε-Funktional enthalten sollen.

Das Verfahren besteht nun in einer Aufeinanderfolge von „Gesamtersetzungen"; jede von diesen wird gebildet durch: eine Funktionsersetzung $\chi(a)$ für $\varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b)$, vermöge deren $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$ übergeht in $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi(a))$, und eine Ersetzung für $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi(a))$, vermöge deren $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ in Zahlzeichen $\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_n$ übergehen und für

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \cdots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

die Werte

$$\chi(\mathfrak{z}_1), \cdots, \chi(\mathfrak{z}_n)$$

erhalten werden.

Wir beginnen mit der Funktion

$$\chi_0(a),$$

die für alle a den Wert 0 hat („Nullersetzung"), und ersetzen auch demgemäß

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \cdots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

alle durch 0.

Unter Festhaltung dieser Ersetzung wenden wir auf

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_0(a))$$

das ursprüngliche Verfahren des Probierens an, das nach höchstens zwei Schritten zum Ziele führt, derart, daß dann die zu

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_0(a))$$

gehörigen kritischen Formeln alle richtig werden.

So erhalten wir eine bzw. zwei Gesamtersetzungen

$$\mathfrak{E}_0 \text{ bzw. } \mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0'.$$

Nun ist entweder $\mathfrak{E}_0$ bzw. $\mathfrak{E}_0'$ endgültig, oder es wird eine der zu

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b) \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_2, b) \quad \text{bzw.} \cdots$$

gehörigen kritischen Formeln falsch. Es gehöre diese etwa zu $\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b)$ und $\mathfrak{a}_1$ gehe in $\mathfrak{z}_1$ über. Dann finden wir ein Beispiel $\mathfrak{z}$, so daß

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z})$$

richtig ist. Dieses Beispiel berücksichtigen wir nun, indem wir als Ersetzungsfunktion für

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b)$$

anstatt $\chi_0(a)$ die Funktion

$$\chi_1(a)$$

nehmen, die definiert ist durch:

$$\chi_1(\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{z}$$
$$\chi_1(a) = 0 \quad \text{für} \quad a \neq \mathfrak{z}_1.$$

Mit $\chi_1(a)$ wiederholen wir nun das obige Verfahren, wobei jetzt die Werte der

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \cdots, n)$$

sich erst nach der Wahl des Wertes für

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_1(a))$$

bestimmen, und bekommen dadurch eine bzw. zwei Gesamtersetzungen

$$\mathfrak{E}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_1'.$$

Nun ist entweder $\mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{E}_1'$ endgültig oder wir finden wieder ein Beispiel $\mathfrak{z}'$ für eines der aus

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \cdots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

durch die letzte Gesamtersetzung hervorgehenden ε-Funktionale, derart, daß für ein gewisses $\mathfrak{z}_2$

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}')$$

richtig ist, während

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_2, \chi_1(\mathfrak{z}_2))$$

falsch ist. Daraus folgt zugleich, daß

$$\mathfrak{z}_2 \neq \mathfrak{z}_1.$$

Nunmehr führen wir statt $\chi_1(a)$ als Ersetzungsfunktion $\chi_2(a)$ durch folgende Definition ein

$$\begin{aligned} \chi_2(\mathfrak{z}_1) &= \mathfrak{z}, \\ \chi_2(\mathfrak{z}_2) &= \mathfrak{z}', \\ \chi_2(a) &= 0 \quad \text{für} \quad a \neq \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2. \end{aligned}$$

Mit dieser Funktion $\chi_2(a)$ wird nun wiederum das Ersetzungsverfahren wiederholt.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir eine Reihe von Ersetzungsfunktionen

$$\chi_0(a), \chi_1(a), \chi_2(a), \cdots,$$

von denen jede aus der vorigen durch Hinzunahme eines von 0 verschiedenen Funktionswertes für einen neuen Argumentwert gebildet ist; und zu jeder Funktion $\chi_p(a)$ haben wir eine bzw. zwei Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_p \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_p, \mathfrak{E}_p'.$$

Es kommt darauf an, zu zeigen, daß diese Ersetzungsreihe abbricht. Dazu betrachten wir zunächst die Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \cdots.$$

Bei diesen ist jedesmal

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$$

durch 0 ersetzt; die

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \cdots, n)$$

gehen daher jedesmal in dieselben ε-Funktionale über; und für jedes von diesen wird entweder 0 gesetzt oder ein von 0 verschiedenes Zahl-

zeichen, welches dann als definitive Ersetzung beibehalten wird. Somit können unter den Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2 \cdots$$

höchstens $(n+1)$ verschiedene sein. Ist aber $\mathfrak{E}_k$ mit $\mathfrak{E}_l$ identisch, so gehört entweder zu keiner von beiden oder zu jeder eine anschließende Ersetzung

$$\mathfrak{E}'_k \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}'_l,$$

und in diesen ist dann

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{R}(a, b))$$

beidemal durch dieselbe als Beispiel gefundene Zahl ersetzt, so daß auch die

$$\varepsilon_b \mathfrak{R}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \cdots, n)$$

für beide Ersetzungen in die gleichen ε-Funktionale übergehen.

Demnach können unter den Ersetzungen $\mathfrak{E}'_l$, für welche $\mathfrak{E}_l$ mit einer festen Ersetzung $\mathfrak{E}_k$ übereinstimmt, wieder höchstens $(n+1)$ verschiedene sein.

Im ganzen kann es also nicht mehr als $(n+1)^2$ verschiedene

$$\mathfrak{E}_p \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E}_p, \mathfrak{E}'_p$$

geben. Daraus folgt aber, daß spätestens mit der Ersetzungsfunktion $\chi_{(n+1)^2}(a)$ unser Verfahren zum Abschluß kommt. Denn es können nicht die zu zwei verschiedenen Ersetzungsfunktionen $\chi_p(a)$, $\chi_q(a)$ $(q > p)$ gehörigen Ersetzungen völlig übereinstimmen, da man sonst mit Hilfe von $\chi_q(a)$ auf dasselbe Beispiel $\mathfrak{z}^*$ geführt werden müßte, das man schon mit Hilfe von $\chi_p(a)$ gefunden hat, während dieses doch in der Definition der auf $\chi_p(a)$ folgenden Ersetzungsfunktionen, insbesondere also auch derjenigen von $\chi_q(a)$, schon benutzt ist.

3. Schließlich sei noch bemerkt, daß man zur Berücksichtigung des Axioms der vollständigen Induktion, welches für den Zweck des Nachweises der Widerspruchsfreiheit in der Form

$$(\varepsilon_a A a = b') \longrightarrow \overline{A b}$$

angesetzt werden kann, nur nötig hat, jedesmal wo man ein Beispiel $\mathfrak{z}$ für das Zutreffen einer Aussage $\mathfrak{B}(a)$ gefunden hat, zum kleinsten Beispiel überzugehen, indem man in der Reihe der auf numerische Formeln reduzierten Aussagen

$$\mathfrak{B}(0), \; \mathfrak{B}(0'), \; \cdots, \; \mathfrak{B}(\mathfrak{z})$$

die erste richtige aufsucht.

Bisher sind in dieser Sammlung erschienen:

1. *J. Hjelmslev,* Die natürliche Geometrie. 1923. Preis *RM* 1.—.
2. *H. Tietze,* Über Analysis Situs. 1923. Preis *RM* 1.—.
3. *W. Wirtinger,* Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. 1926. Preis *RM* 1—.
4. *W. Blaschke,* Leonardo und die Naturwissenschaften. 1928. *RM* 1.—.
5. *D. Hilbert,* Die Grundlagen der Mathematik. Mit Zusätzen von *H. Weyl* und *P. Bernays.* 1928. *RM* 1.—.